УДК 519.85

***СВИЩЁВА ЕВГЕНИЯ ВИТАЛЬЕВНА***
***АЛЕКСЕНКО ВЛАДИСЛАВ АНДРЕЕВИЧ***
**e-mail: esvishchova@gmail.com**
Украина, Харьковский гуманитарный университет "Народная украинская академия"

# ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

*В работе изучается графический метод решения задач линейного программирования, позволяющий получить представление о возможностях практического использования оптимизационных методов при решении конкретных экономических задач. Основной результат работы состоит в составлении математических моделей и последующем решении графическим методом двух прикладных экономических задач*.

Ключевые слова: математическая модель, градиент, линия уровня, область допустимых решений, оптимальное решение, метод полного исключения, базисные и свободные переменные, общее решение.

Развитие современного общества характеризуется повышением технического уровня, усложнением организационной структуры производства, предъявлением высоких требований к методам планирования. В этих условиях только научный подход к руководству экономической жизнью общества позволит обеспечить высокие темпы развития. Одним из необходимых условий дальнейшего развития экономической науки является применение точных методов количественного анализа, широкое использование математики.

Объектом исследования являются оптимизационные задачи, принадлежащие к классу задач линейного программирования.

Предметом исследования является графический метод решения задач линейного программирования.

Цель работы – раскрыть возможности практического использования оптимизационных методов при решении задач, возникающих в экономике.

Рассмотрим следующие задачи.

ЗАДАЧА №1

Завод – производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей – А и В. Завод располагает фондом рабочего времени в 20000 чел.-ч. в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 4 чел.-ч., а для производства одной детали типа В – 5 чел.-ч. Технологические особенности производства позволяют выпускать не более 3000 деталей типа А. Каждая деталь типа А требует 2 кг металлических стержней 3 кг листового металла, а для производства одной детали типа В необходимо 1 кг стержней и 10 кг листового металла. Запас стержней составляет 7000 кг в неделю, а листового металла – 30000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет своему постоянному заказчику 1000 деталей типа А и 500 деталей типа В. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не мене 3000 штук.

Необходимо выяснить, сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа А составляет 40 ден. ед., а В – 70 ден. ед.

<u>Решение</u>

Составим математическую модель задачи. Обозначим через $x_1$ – планируемый недельный объем выпуска деталей типа А, $x_2$ – типа В. Тогда доход от производства деталей двух типов за неделю можно записать в виде:

$$Z = 40x_1 + 70x_2$$

Требуется найти такие значения переменных $x_1$ и $x_2$, при которых $Z$ принимает максимальное значение.

Ограничения по фонду рабочего времени можно записать в виде неравенства:

$$4x_1 + 5x_2 \le 20000.$$

Так как завод не может выпускать более 3000 деталей типа А, то получаем неравенство:

$$x_1 \le 3000.$$

Запасы металлических стержней и листового металла ограничены. Это можно записать следующим образом:

$$2x_1 + \quad x_2 \le 7000 \text{ (стержни)},$$
$$3x_1 + 10x_2 \le 30000 \text{ (металл)}.$$

Кроме того, поставки постоянному клиенту дают неравенства

$$x_1 \ge 1000,$$
$$x_2 \ge 500.$$

Наличие профсоюзного соглашения записывается в виде:

$$x_1 + x_2 \ge 3000.$$

Учитывается, что $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$, получаем математическую модель задачи:

$$Z = 40x_1 + 70x_2 \ \to max$$

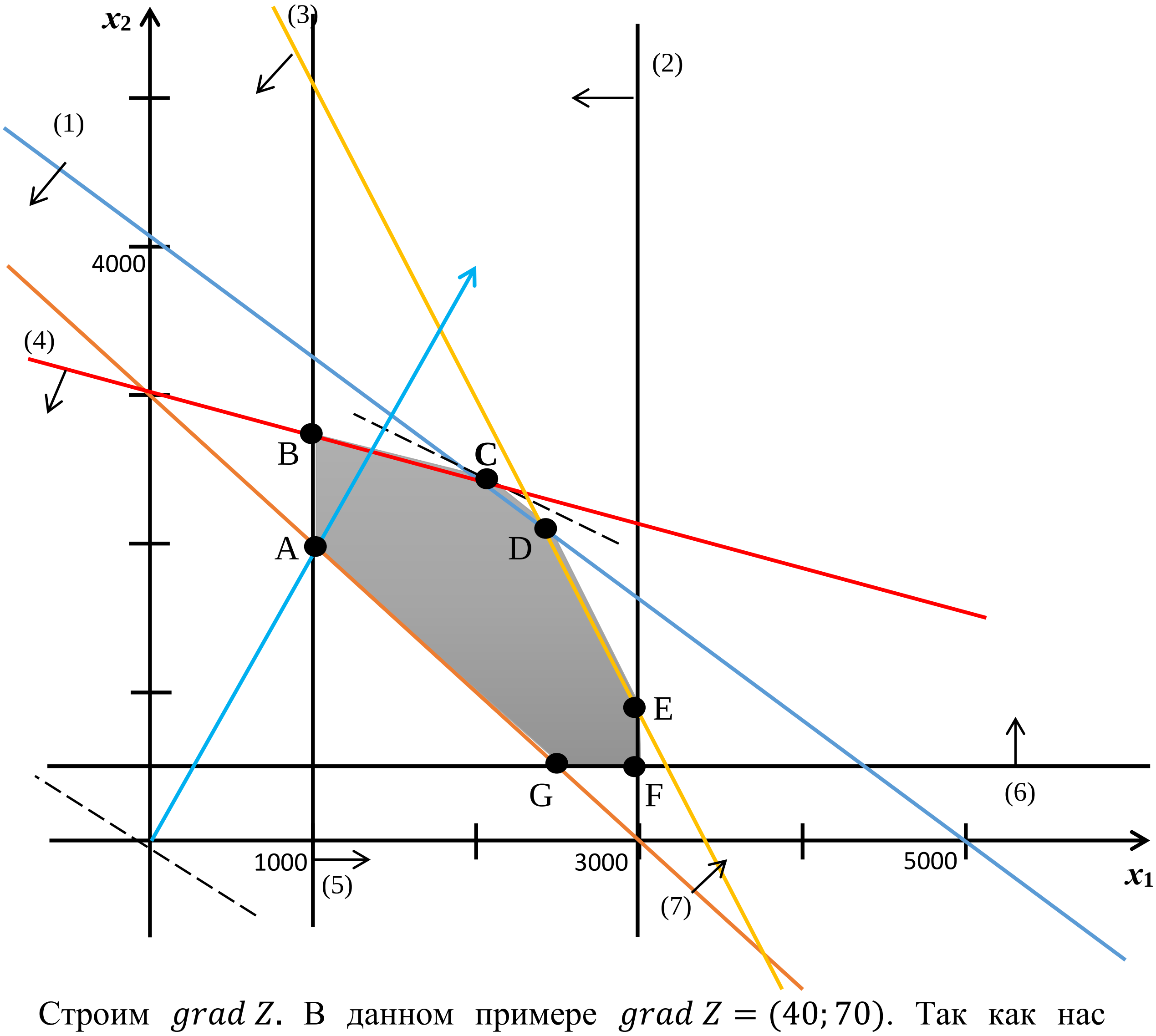
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20000 \\ x_1 \le 3000 \\ 2x_1 + x_2 \le 7000 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 30000 \\ x_1 \ge 1000 \\ x_2 \ge 500 \\ x_1 + x_2 \ge 3000 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Строим область допустимых решений задачи [1], [2].

Рассмотрим первое неравенство $4x_1 + 5x_2 \leq 20000$. Прямую $4x_1 + 5x_2 = 20000$ строим по точкам:

| | | |
|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 5000 |
| $x_2$ | 4000 | 0 |

Эта прямая делит плоскость на две части, в одной из которых неравенство выполняется, а в другой нет. Берем любую точку, не лежащую на прямой, например, начало координат. Подставляем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ в неравенство, получаем $0 \leq 20000$. Неравенство справедливое, следовательно, точка (0;0) лежит в той полуплоскости, которая нас интересует. Аналогично строим полуплоскости, задаваемые остальными неравенствами. Пересечение всех полуплоскостей в рассматриваемом примере дает многоугольник ABCDEFG.




Строим $grad\, Z$. В данном примере $grad\, Z = (40; 70)$. Так как нас интересует только направление $grad\, Z$, а не его модуль, для удобства построения берем вектор:

$$50 grad\, Z = (2000; 3500).$$

Строим перпендикулярно этому вектору линию уровня и, передвигаем её параллельно самой себе, находим предельное положение, определяющее экстремальную точку, в которой $Z$ принимает максимально значение. В данном случае это точка С.

Точка С лежит на пересечении прямых (1) и (4), поэтому её координаты получим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + \ \ 5x_2 \ = \ 20000 \\ 3x_1 + 10x_2 = 30000 \end{cases}$$

Находим С (2000; 2400).

Итак,

$$\text{X}_{\text{опт}} = (2000; 2400), \quad Z_{max} = 248000 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, доход за неделю составит 248000 ден. ед., если объем производства составит 2000 деталей типа А и 2400 деталей типа В за неделю.

## ЗАДАЧА №2

Для производства продукции 5 видов предприятие использует 3 вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство всех видов продукции, запасы сырья и прибыль, получаемая от реализации единицы каждого вида продукции, приведены в таблице:

| Продукция / Сырье | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | Запасы сырья |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 1 | 5 | 2 | – | 1 | 300 |
| $S_2$ | 4 | 1 | – | 1 | 1 | 200 |
| $S_3$ | – | 3 | 2 | 1 | 1 | 200 |
| Прибыль | 1 | 5 | 3 | 1 | 2 | |

Необходимо найти план производства продукции, обеспечивающий максимальную прибыль при условии, что данное предприятие будет переориентировано на выпуск продукции из другого вида сырья и, следовательно, данные запасы сырья должны быть полностью использованы.

### Решение

Составим математическую модель рассматриваемой задачи. Обозначим через $x_j$ план производства продукции $P_j$. Тогда прибыль, получаемая от реализации всей продукции, может быть записана следующим образов:

$$Z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5$$

Требуется найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, при котором функция Z принимает максимальное значение.

Для производства продукции используется 3 вида сырья. Потребление сырья должно быть равно его запасам, т.к. по условию задачи запасы сырья должны быть полностью использованы. Связь между использованием сырья и их запасами выражаются системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 300 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 200 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 200 \end{cases}$$

В соответствии с экономическим смыслом задачи система уравнений должна быть дополнена условиями неотрицательности переменных $x_j$.

Таким образом, получена математическая модель задачи:

$$Z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 300 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 200 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 200 \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1{,}5} \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом полного исключения [1].

Все вычисления оформляем в виде таблицы.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 0 | 1 | 300 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 200 |
| 0 | 3 | 2 | 1 | 1 | 200 |
| 1 | 5 | 2 | 0 | 1 | 300 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 200 |
| –4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 5 | 2 | 0 | 1 | 300 |
| 3 | –4 | –2 | 1 | 0 | –100 |
| –4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 0 | 0 | 1 | 300 |
| –1 | –2 | 0 | 1 | 0 | –100 |
| –2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Переменные $x_3,\ x_4,\ x_5$ – базисные, $x_1$ , $x_2$ – свободные.

По последнему шагу таблицы записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_5 = 300 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = -100 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_5 = 300 - 5x_1 - 3x_2 \\ x_4 = -100 + x_1 + 2x_2 \\ x_3 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

Записываем общее решение системы уравнений:

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ -100 + x_1 + 2x_2 \\ 300 - 5x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

С помощью полученного $X_{общ}$ преобразуем функцию $Z$:

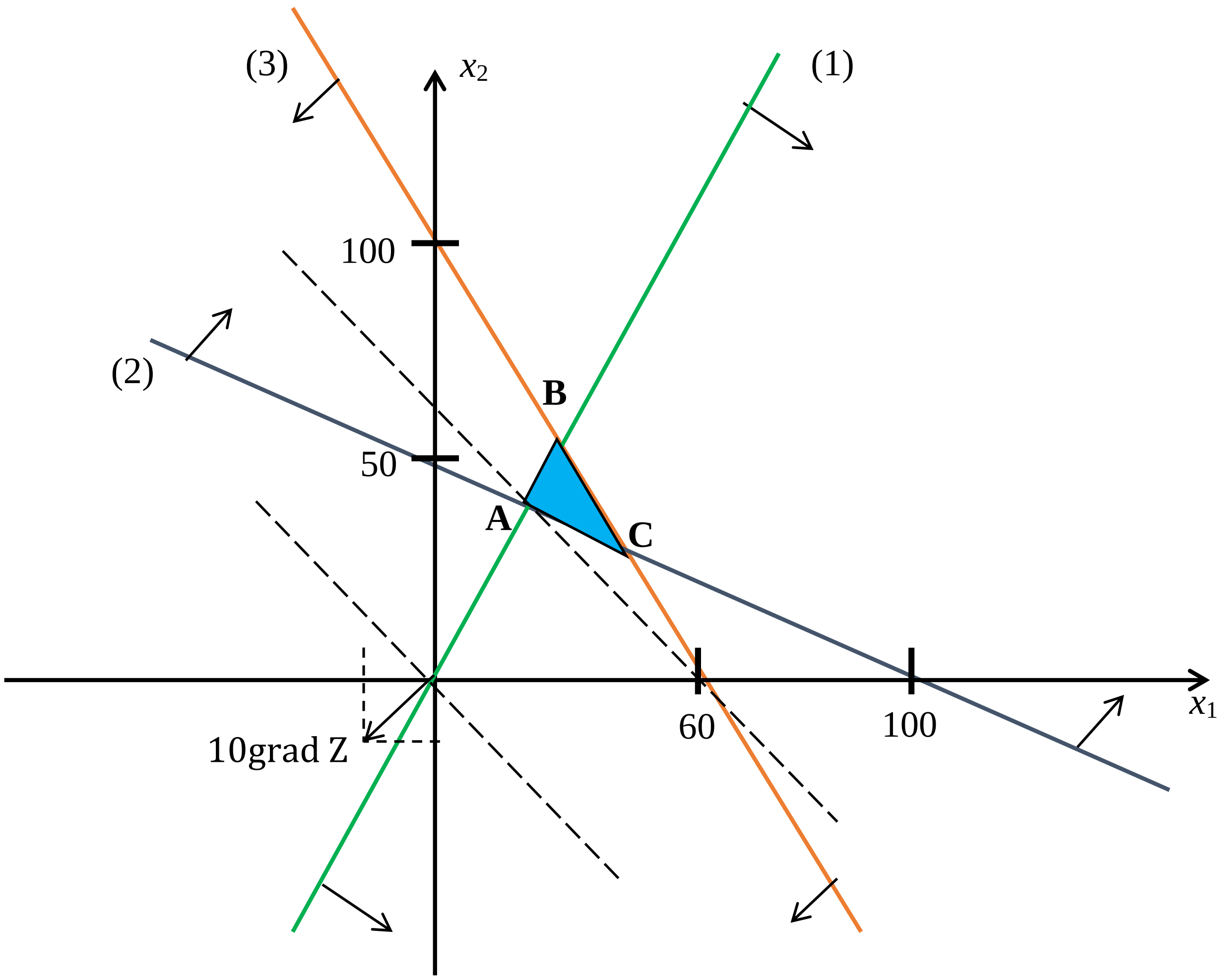
$$Z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = x_1 + 5x_2 + 3(2x_1 - x_2) +$$
$$+(-100 + x_1 + 2x_2) + 2(300 - 5x_1 - 3x_2) = -2x_1 - 2x_2 + 500$$

Так как по условию $x_j \geq 0$, исходную задачу можно заменить следующей:

$$Z = -2x_1 - 2x_2 + 500 \ \to max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ -100 + x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ 300 - 5x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решаем полученную задачу.

Строим область допустимых решений задачи так же, как это было сделано в предыдущей задаче. Получаем треугольник ABC.



Откладываем вектор $10 \text{grad}\, Z = (-20; -20)$. Строим перпендикулярную этому вектору линию уровня и, передвигая её параллельно самой себе в направлении треугольника ABC, находим точку A, в которой Z принимает максимальное значение. Точка A лежит на пересечении первой и второй прямых, поэтому её координаты получаем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -100 + x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Находим A(20;40).

Подставим эти координаты в $X_{\text{общ}}$, получаем оптимальное решение

$$X_{\text{опт}} = (20; 40; 0; 0; 80).$$

Таким образом, для получения максимальной прибыли необходимо произвести продукцию $P_1$ в количестве 20 единиц, $P_2$ – в количестве 40 единиц и $P_5$ – в количестве 80 единиц. Продукцию $P_3$ и $P_4$ производить нецелесообразно. Прибыль при этом составит:

$$Z = 20 + 5 \cdot 40 + 3 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 80 = 380 \text{ ден. ед.}$$

**Библиографический список**

1. Михайленко, С.В. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебное пособие / С.В. Михайленко, Е.В. Свищева. – Х. : НУА, 2008. – 104 с.

2. Михайленко, С.В. Оптимизационные методы и модели : учебное пособие / С.В. Михайленко, Е.В. Свищева. – Х. : НУА, 2012. – 184 с.

**Svishchova Ievgenia**
**Aleksenko Vladislav**
**e-mail: esvishchova@gmail.com**
Ukraine, Kharkov University of Humanities "People's Ukrainian Academy"

## GRAPHICAL METHOD FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEM

*This paper provides research of graphical method for solving linear programming problems allowing to get a picture of possibilities for practical use of optimization methods for solving real world economic problems. Key result of this research is compilation of mathematical models following by solution of two practical economic problems using graphical method.*

Keywords: mathematical model, gradient, level line, allowable range, optimal solution, full exclusion method, basic and nonbasic variables, common solution.